合同式ゼータ関数の「Riemann 予想」を巡って : 1930年から1954年まで (数学史の研究)

小柴, 洋一

数理解析研究所講究録
第 1677 巻 2010 年 223-229

合同式ゼータ関数の「Riemann 予想」を巡って-1930 年から 1954 年まで

小柴 洋一 (鹿児島大 (理))

2009 年 8 月 27 日 (木)

1 はじめに

合同式ゼータ関数の理論を前回もお話させていただきました．そのときは時間が無くて説明不足の部分が多数ありましたのでその部分に重点をおいて講演します．そのため昨年の講究録と重複しているところもあります．

合同式ゼータ関数は Artin,E により 1924 年に始まります（文献 [12]）．Artin,E.[13],Hasse[4] 等による 1920 年代後半のドイツ研究者たちから始まります．

関数体の「Riemann 予想」はしばしば不等式

$$|1+q-N| \leqq 2g \cdot q^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

で表現されます．*1 Weil[7] に依ると代数曲線 $ax^3 - by^3 \equiv 1 \pmod p$ の場合に Gauss は同じ認識に達していたというのです．Gauss [3]，小柴 [14] 参照．

2 代数的数体と代数関数体の類似性

ここは前回でも述べた (2008 年)．

合同式ゼータ関数を考えるアイデアは、有理数体上の有限次代数体と 1 変数代数関数体の類似性にあります。Emil Artin(1924 年) 以前にこの類似性に注目した数学者、もしくは論文著作が種々見られます*2。

*1 概念，記号の意味等は後ほど正確に述べます．

*2 もちろん、初等的には、整数と多項式の類似といってもよろしいかと思います

特に1変数代数関数体の定数体を有限体にするとその類似性が強められ，ゼータ関数を考えることが出来ます.

3 合同式ゼータ関数

有限体 k を定義体とする代数曲線 C/k があるとき

$$\zeta(s;C/k)=\sum_{\mathfrak{A}>0}N(\mathfrak{A})^{-s} \tag{2}$$

右辺の総和は C/k の全ての正因子 $\mathfrak{A}$ を走るのです.

式 (2) は Weil[7] 以来

$$\sum_{1}^{\infty}N_\nu U^{\nu-1}=\frac{d}{du}\log Z(u),\quad u=q^{-s}$$

と書かれることが多い. N_ν は k の ν 次拡大 k_ν 有理点の個数.

$$N_\nu=\sum_{\deg(\mathfrak{p})|\nu}\deg(\mathfrak{p}),\qquad \mathfrak{p}\text{ は曲線 }C\text{ の定数体 }k\text{ 上の関数体の素因子.}$$

であるからです. これなら高次元の多様体の場合にも意味が解りやすい. 数体と関数体との類似性で言えば有理数体 Q の正因子 $\mathfrak{A}$ は正整数 n と考えられます. この右辺は

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$$

でこれは良く知られた Riemann ゼータ関数です.

4 Weil[8] の証明を review する

昨年 2008 年の講究録 [14] にも書きましたが

$$Z(u)=\frac{P(u)}{(1-u)(1-qu)}$$

$u=q^{-s}$. ここでは $P(u)$ は $2g$ 次の有理整係数の多項式.

の形をなしている事が解ります [8]71 ページ参照. 定数項は1になっています.

「Riemann 予想」とは $P(u)$ の零点の絶対値が $q^{-\frac{1}{2}}$ であることだといっても良いことになります.

5 代数的対応の環

代数曲面 $C \times C$ の因子の全体の集合に乗法を定義します．Weil[8]29 ページに依ると直感的にいえば C から C への因子の写像の積とみてこの乗法を定義します．この環は可換性はありません．単位元は diagonal すなわち $\Delta = \{(x,x)|x \in C\}$，恒等対応です．

$C \to C \quad x \to x^q$ を Frobenius 対応といいます．$X \in R$ について $C \times C$ で第 1 成分と第 2 成分を入れ替えたものを X' で表す．

代数的対応環 R に次のように両側イデアル $\mathfrak{A}$ を決めます．

$$\mathfrak{A} = \{X \in R | X \sim C \times \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \times C\}$$

$\mathfrak{A}$ は R の両側イデアルの条件を満たしているのです．記号 $\sim$ は 1 次同値 linearly equivalent の意味です．

環 $R/\mathfrak{A}$ は C の Jacobi 多様体の自己準同型環に標準的に同型になっています (Weil[8]163 ページ参照)．

6 証明の核心

環 $R/\mathfrak{A}$ において δ を C の恒等対応の類，ι を C の Frobenius 対応の類とします．

x, y を任意の有理整数として $\xi = x \cdot \delta + y \cdot \iota$. とおく．

$$2g \cdot x^2 + 2\sigma(\iota^n) \cdot xy + 2gq^n \cdot y^2 \geqq 0 \tag{3}$$

x, y についての 2 次形式は正定値なのです．これは式 (4) より解ります．

$\sigma(X) = \sigma(x), X \in R, x \in R/\mathfrak{A}$ とは C の Jacobi 多様体の l 進表現のトレースです．$\sigma(X) = d(X) + d'(X) - I(X \cdot \Delta)$ と言っても良い．$I = (X \cdot Y)$ は因子 X,Y の曲面 $C \times C$ の上での交差積 intersection product の次数です．

$$Castelnuovo^{*3}\text{の不等式} \quad \sigma(\xi \cdot \xi') \geqq 0 \tag{4}$$

$$d[\log P(u)] = -\sum_{n-1}^{\infty} \sigma(\iota^n) \cdot u^n \cdot \frac{du}{u}. \tag{5}$$

複素変数 u の関数 $logP(u)$ の正則性は多項式 $P(u)$ の零点で決まる．式 (5) の右辺は巾級数についての Cauchy-Hadamard の公式より 式 (3) を使って $|u| < q^{-\frac{1}{2}}$ で収束してい

*3 Castelnuovo,Guido 1865-1952

ることが解る．関数等式 (6) から $|u| > q^{-\frac{1}{2}}$ でも正則である．したがって多項式 $P(u)$ の零点は $|u| = q^{-\frac{1}{2}}$ の上にある．

式 (3) は式 (4) より解るのです．すなわち，この場合の Riemann 予想の成り立つ事の本質は式 (4) なのです．

7 Schmidt(1975), Herglotz(1921)

文献 Schmidt [9] によると

$$ax^3 - by^3 \equiv 1 \pmod p \quad p = 3n+1$$
$$ax^4 - by^4 \equiv 1 \pmod p \quad p = 4n+1$$
$$ax^3 - by^3 \equiv 1 \pmod p$$

が Gauss[3] に見られるという．Eichler 文献 [5] によると Gauss は方程式

$$f(x,y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 - 1 \equiv 1 \pmod p$$

の場合に関数体の「Riemann 予想」すなわち式 (1) を予想した．

Herglotz はこれを証明している． 文献 Herglotz [6] を参照．

因みに Herglotz は Artin の師にあたるという．Artin 全集による．

8 Riemann が考えた解析接続を現代流にとらえると

Riemann は今日でいうところの Riemann 面上の積分計算をたくましく展開している．Riemann 講義録 [2].

級数は $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ は定義域が $\Re s > 1$ でないと意味がない．これを複素変数 s として Riemann はどのように考えたのであろうか？

$\sigma > 1$ に対し

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx.$$

この積分で x を nx におきかえると

$$n^{-s}\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-nx} dx$$

が得られ、$n = 1, 2, \cdots$ について総和をとることにより

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx$$

を得る。何故なら、右辺の積分はその両端で絶対収束し、積分と無限和の交換は許される。

ここで s を複素変数のパラメーターとみなし複素積分を考えよう．正の無限大から実軸に近い直線から始まり帰ってゆく道 C を考えよう。

定理 1. $\sigma > 1$ に対し、正の実軸の補集合において $(-z)^{s-1}$ を $e^{(z-1)\log(-z)}$, $-\pi < \Im\log(-z) < \pi$ と定義すると、

$$\zeta(s) = -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz$$

が成り立つ。

Proof. 右辺の積分の収束は明らかである。コーシーの定理により、複素積分変数 $z = x + yi$ が複素平面上の整数倍の点を囲まないかぎり積分路の形をかえてもかまわない。とくに、円周の半径を 0 に収束させてよい。円周上の積分が $r \to 0$ のときに 0 になることはすぐにわかる。極限においては、結局、正の実軸を往復する積分となる。上半平面側では $\int_\infty^0 \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx$ となり、下半平面側では $\int_0^\infty \frac{(xe^{2\pi i})^{s-1}}{e^x-1}dx$ であり、ゆえに、

$$\int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz = (e^{2\pi is}-1)\Gamma(s)\zeta(s)$$

をうる。 □

9 Hadamard と De la Vallee Poussin

素数定理の証明は良く知られたように（Ingham[10]）

直線 $\sigma = 1$ 上でゼータ関数は零点を持たない．

ことから出ます．

Hadamard （フランス） と De la Vallee Poussin（ベルギー）が１８９６年，それぞれ独立に証明した．現代の高校生の三角関数の計算からさえ解る初等的な不等式

$$2(1+\cos\theta)^2 = 3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta \geqq 0$$

を使って

$$\log|\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma+ti)\zeta(\sigma+2ti)| = \sum c_n n^{-\sigma}\{3+4\cos(t\log n)+\cos(2t\log n)\} \geqq 0$$

が言える．あとは複素関数論のやさしい演習問題である．

10 Riemann-Roch の定理

A を C の因子とするとき，$L(A)=\{f|(f)+A\geqq 0\}$ すなわち，Riemann 面 C 上の有理関数 f で高々 D で極を持つものは有限次ベクトル空間をなす．この事は Riemann による．

$l(A)=\dim L(A)$，g を C の種数，$n(A)$ を A の次数，W を微分因子とする．このとき

$$l(A)=n(A)-g+1+l(WA^{-1})$$

である．岩沢 [11]89page 定理 2.13 による．

合同式ゼータ関数についていえば Hasse[4] は関数等式

$$Z(\frac{1}{qu})=q^{1-g}u^{2-2g}Z(u) \tag{6}$$

を Riemann-Roch の定理を使って証明した．したがって定数体が有限体の場合を含む抽象的な代数関数論，代数関数体の理論が必要になった．Deuring,Witt 等が 1930 年代のドイツで展開された．

参考文献

[1] B.Riemann. Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. *Monats berichte der Berliner Akademie*, November 1859.

[2] B.Riemann. Die partiellen differential-greichungen der mathematischen physik. *Braunschweig*, 1919. bearbeitet von Heirich Weber.

[3] C.F.Gauss. *Disqusitiones Arithmeticae.* Springer, 1971.

[4] Hasse,Helmute. Über die Kongruenzzetafunktionen. Sitzgs.-ber.. Peuss.Akad.Wiss.. Berlin. 1934.

[5] M Eichler. *Einführung in die Theorie der Algebraishen Zahlen und Funktionen.* Birkhäuser, 1963.

[6] G.Herglotz. Zur letzen eintragung im gaußschen tagebuch. *Ber. Verh.Sáchs.Akad. Wiss.Leipzig Math. Phys.*, Vol. Kl.73, pp. 271–276, 1921.

[7] Weil. Numbers of solutions of equations in finite fields. *Bull. Am. Math. Soc.*, Vol. 55, pp. 497–508, 1949.

[8] A Weil. *Variétés abeliennes et courbes algébriques*. Hermann, 1948.

[9] W.F.Schmidt. *Equations over Finite Fields An Elementary Approach*, Vol. 536. Springer, 1975. Lecture Notes.

[10] A.E.Ingham. The Distribution of Prime Numbers. Cambridge. 1932.

[11] 岩沢健吉. 代数関数論. 岩波. 1952.

[12] 小柴洋一. E.Artin(1924) による合同式ゼータ関数のはじまりについて. 数理解析研究所講究録 1257. 2002.

[13] E,Artin. Quadratische Korper im Gebiete der Hoheren Kongruenzen.I,II. Math.Zeitshirift. 1924.

[14] 小柴洋一. Weil 論文 (1949) が引用した Gauss 資料について. 数学会歴史分科会アブストラクト. 2009 年春.